



گزینه ۲

۱

با استفاده از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ می‌توان نوشت:

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{9} = \left(\frac{12+x}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{12+x}{12} \Rightarrow x = 4 \text{ m/s}$$

گزینه ۴

۲

انرژی پتانسیل گرانشی آن در حالت دوم برابر است با:

$$U_2 = U_1 - 0.6U_1 = 0.4U_1$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$mgh_2 = 0.4mgh \xrightarrow{h_2=h-15} h-15 = 0.4h \Rightarrow 0.6h = 15 \Rightarrow h = 25 \text{ m}$$

گزینه ۱

۳

با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی کار برآیند نیروهای وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 4(36 - 0) = 72 \text{ J}$$

$$W_F = F \cdot d \cos \theta = 20 \times 10 \times 1 = 200 \text{ J}$$

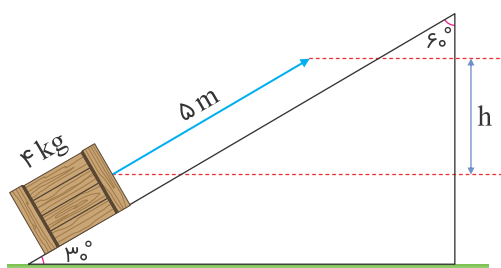
حال با استفاده از دو رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$W_F + \overbrace{W_{mg}}^{\text{}} + \overbrace{W_{FN}}^{\text{}} + W_f = 72 \Rightarrow 200 + W_f = 72 \Rightarrow W_f = -128 \text{ J}$$

گزینه ۳

۴

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{5} \Rightarrow h = \frac{5}{2} \text{ m}$$

$$W_{mg} = -mgh = -4 \times 10 \times \frac{5}{2} = -100 \text{ J}$$

انرژی مکانیکی جسم در نقاط A و B را می‌نویسیم:

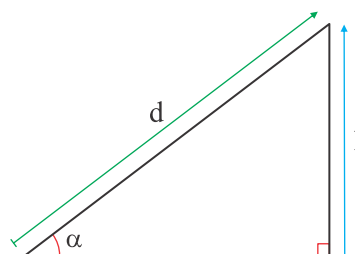
$$E_A = K_A + U_A = K_A + 0 = K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 64 = 64 \text{ J}$$

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2} \times 2 \times 9 + 2 \times 10 \times 2 \times \sin 30^\circ = 9 + 20 = 29 \text{ J}$$

حال تغییرات انرژی مکانیکی جسم برابر است با:

$$E_B - E_A = 29 - 64 = -35 \text{ J}$$

با استفاده از سطح شیب‌دار و روابط مثلثاتی رابطه بین جابه‌جایی و ارتفاع به دست می‌آید.



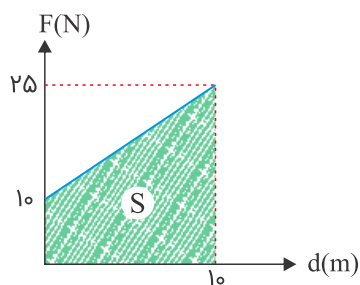
$$\sin \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin 37^\circ} = \frac{h}{0.6}$$

پس می‌توان رابطه نیرو را برحسب جابه‌جایی در سطح شیب‌دار بیان کرد:

$$F = 2/5h + 10 \xrightarrow{h=0.6d} F = 2/5\left(\frac{6}{10}\right)d + 10 \Rightarrow F = 1/5d + 10$$

برای محاسبه کار نیروی F مساحت زیر نمودار (F - d) را به ازای h = 6 m که d = 10 می‌شود به دست می‌آوریم:

$$W_F = S = \left(\frac{25 + 10}{2}\right)(10) \Rightarrow W_F = 175 \text{ J}$$



$$W_{mg} = -mg\Delta h = -2(10)(6) = -120 \text{ J} \Rightarrow W_F + W_{mg} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - 0) \Rightarrow 175 - 120 = v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{55} \simeq 7.4 \text{ m/s}$$

باتوجه به گزینه‌ها می‌توان مقدار تقریبی را حدس زد.

در این سؤال ابتدا باید بدانیم که نیروی اصطکاک در خلاف مسیر حرکت جسم بوده و اینکه d در این مسئله برابر با مسافتی است که جسم روی مسیر دایره‌ای طی می‌کند. داریم:

$$A \rightarrow B : W_{f_k} = -f_k \cdot d = -f_k \left(\frac{1}{4} \times 2\pi r \right) = -2 \left[\frac{1}{4} \times 2 \times 3 \times \frac{2}{10} \right] = -6 \text{ J}$$

$$E_B - E_A = W_{f_k} \Rightarrow \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \left[mgh_A + \frac{1}{2} m v_A^2 \right] = -6 \Rightarrow v_B^2 - 29 = -6$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 23 \Rightarrow v_B = \sqrt{23} \text{ m/s}$$

$$A \rightarrow C \rightarrow B : W_{f_k} = -f_k \cdot d = -f_k \left(\frac{3}{4} \times 2\pi r \right) = -20 \left[\frac{3}{4} \times 2 \times 3 \times \frac{5}{2} \right] = -18 \text{ J}$$

$$E_B - E_A = W_{f_k} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \left[mgh_A + \frac{1}{2} m v_A^2 \right] = -18$$

$$\Rightarrow v_B^2 - 29 = -18 \Rightarrow v_B = \sqrt{11} \text{ m/s}$$

$$\text{نسبت } V_B \text{ از دو مسیر} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{23}}$$

$$W_{mg} = -mgh = -60000 \times 10 \times 600 = -3/6 \times 10^8 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= U_1 + K_1 = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \\ E_2 &= U_2 + K_2 = mgh + \frac{1}{2} m (2v_1)^2 = mgh + 2m v_1^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_2 - E_1 = mgh + 2m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh + \frac{3}{2} m v_1^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = 60000 \times 10 \times 600 + \frac{3}{2} \times 60000 \times 80^2 = 3/6 \times 10^8 + 5/76 \times 10^8 \text{ J}$$

$$= 9/36 \times 10^8 \text{ J}$$

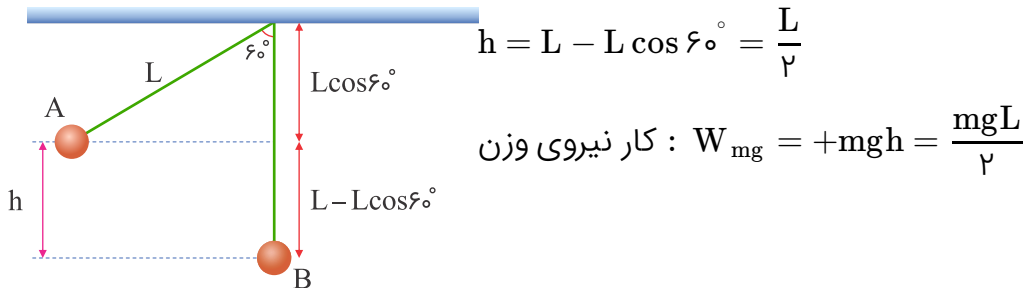
ابتدا توان مفید بالا را به دست می‌آوریم:

$$R_a = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{60}{100} = \frac{P_{\text{مفید}}}{500} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 300 \text{ W}$$

و در آخر با استفاده از رابطه $P = \frac{W}{t}$ ، مدت زمان بالا بردن جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow 300 = \frac{6 \times 10 \times 20}{t} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

با توجه به شکل داریم:



با توجه به این که جسم بر روی سطح افقی جابجا می شود و نیروی افقی F بر آن وارد می شود، پس نیروی F هم جهت با جابجایی بوده و $\theta = 0^\circ$ و در نتیجه $\cos \theta = 1$ می شود، بنابراین می توان نوشت:

$$W_1 = F_1 \cdot d_1 \cos \theta = 5 \times 4 \times 1 = 20 \text{ J}$$

$$W_2 = F_2 \cdot d_2 \cos \theta = 15 \times 6 \times 1 = 90 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_T = W_1 + W_2 = 20 + 90 = 110 \text{ J}$$

برای هر سه جسم، قانون پایستگی انرژی مکانیکی را برای نقاط A و B می نویسیم:

$$\text{جسم ۱: } E_{1A} = E_{1B} \Rightarrow \cancel{K_{1A}} + U_{1A} = K_{1B} + \cancel{U_{1B}} \Rightarrow mgh = K_{1B}$$

$$\text{جسم ۲: } E_{2A} = E_{2B} \Rightarrow \cancel{K_{2A}} + U_{2A} = K_{2B} + \cancel{U_{2B}} \Rightarrow mgh = K_{2B}$$

$$\text{جسم ۳: } E_{3A} = E_{3B} \Rightarrow \cancel{K_{3A}} + U_{3A} = K_{3B} + \cancel{U_{3B}} \Rightarrow 2mgh = K_{3B}$$

در نتیجه:

$$K_{3B} = 2K_{2B} = 2K_{1B} \Rightarrow 2K_1 = 2K_2 = K_3$$

با توجه به این که در هر دو حالت توان ها یکسان است و با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی می توان نوشت:

$$W_1 = \Delta K_1 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_1'^2) = \frac{1}{2}m(36 - 4) = 16 \text{ m}$$

$$W_2 = \Delta K_2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_2'^2) = \frac{1}{2}m(144 - 64) = 40 \text{ m}$$

$$P_{av1} = P_{av2} \Rightarrow \frac{W_1}{\Delta t_1} = \frac{W_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{16m}{20} = \frac{40m}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 50 \text{ s}$$

باتوجه به این که سطح بدون اصطکاک است می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_A = E_B &\Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \\ \Rightarrow mgh_A + 0 &= mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \Rightarrow 10 \times 6 &= 10 \times 2 + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

چون تندی ثابت است پس نیروهای در راستای حرکت (قائم) یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی:

$$F = mg = 300 \times 10 = 3 \times 10^3 \text{ N}$$

بنابراین با استفاده از رابطه $P_{av} = FV \cos \theta$ می‌توان نوشت:

$$P_{av} = F \cdot v \cos \theta \Rightarrow 8 \times 750 = 3 \times 10^3 v \times 1 \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

کار نیروی F برابر است با:

$$W_F = Fd \cos \theta = 20 \times 4 \times \cos 53^\circ = 20 \times \frac{6}{10} \times 4 = 48 \text{ m}$$

چون سطح بدون اصطکاک است، انرژی مکانیکی پایسته است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \times 16 + 10 \times 5 &= \frac{1}{2} \times 36 + 10h_2 \\ \Rightarrow 58 &= 18 + 10h_2 \Rightarrow 10h_2 = 40 \Rightarrow h_2 = 4 \text{ m} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار مسافت طی‌شده بر روی سطح برابر است با:

$$\sin 53^\circ = \frac{h_2}{d} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 10 \text{ m}$$

نیروهای وزن، عمودی سطح، اصطکاک و F بر جسم وارد می‌شوند. از این میان کار نیروهای اصطکاک و F غیر صفر است (نیروهای وزن و عمودی سطح، بر جابه‌جایی عمودند و کار آنها صفر می‌شود). با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} W_t = \Delta K &\Rightarrow W_f + W_F = \Delta K \Rightarrow W_f + F \cdot d \cos \theta = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \\ &\Rightarrow W_f + 24 \times 15 \times 1 = \frac{1}{2} \times 2 (64 - 4) \\ &\Rightarrow W_f + 360 = 60 \Rightarrow W_f = -300 \text{ J} \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به رابطه $W_F = -f_k d$ داریم:

$$-300 = -f_k \times 15 \Rightarrow f_k = 20 \text{ N}$$

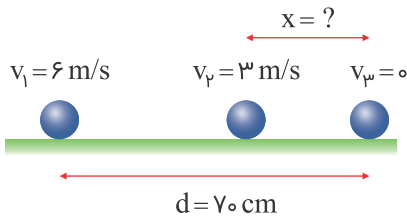
کار نیروی وزن به جرم جسم و شتاب جاذبه گرانش و تغییر ارتفاع جسم بستگی دارد. بنابراین هنگامی که جسم از نقطه A به نقطه B می‌رسد، به اندازه $m = 12$ (۱۶ - ۴) تغییر ارتفاع می‌دهد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = +mgh = +1 \times 10 \times 12 = 120 \text{ J}$$

با استفاده از رابطه $K = \frac{1}{2} mv^2$ ، انرژی جنبشی هر جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{v^2}{4} = \frac{K}{4} \\ K_2 &= \frac{1}{2} (2m) (v)^2 = \frac{1}{2} \times 2mv^2 = 2K \\ K_3 &= \frac{1}{2} m (2v)^2 = \frac{1}{2} m \times 4v^2 = 2K \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_3 = 2K_2 = 16K_1$$

مسیر حرکت جسم به صورت زیر است:



با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی بین نقاط (۱) و (۳) داریم:

$$W_t = \Delta K = K_3 - K_1 \Rightarrow -f_k d = -\frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow f_k = \frac{m v_1^2}{2d}$$

$$\Rightarrow f_k = \frac{0.05 \times 36}{2 \times 0.7} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \text{ N}$$

قضیه کار و انرژی برای نقاط (۲) و (۳) نوشته می‌شود:

$$W_t = K_3 - K_2 \Rightarrow -f_k x = -K_2 \Rightarrow \frac{9}{7} x = \frac{1}{2} (0.05) (3)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{9} \times 0.05 \text{ m} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{100} \times 100 \text{ cm} = 17/5 \text{ cm}$$

با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\cancel{W_{F_N}} + \cancel{W_{mg}} + W_F + W_{f_k} = \Delta K \Rightarrow (F \cos 53^\circ) d + W_{f_k} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow 25 \times \frac{6}{10} \times 9 + W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 2 (9 - 0)$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = 9 - 15 \times 9 = -14 \times 9 \text{ J}$$

از طرفی می‌دانیم که $W_{f_k} = f_k \cdot d \cos 180^\circ$ است، پس داریم:

$$W_{f_k} = -f_k \cdot d \Rightarrow -14 \times 9 = -f_k \times 9 \Rightarrow f_k = 14 \text{ N}$$

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی در طول مسیر حرکت داریم:

$$E_A = E_B = E_C$$

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 100 + 10 \times 15 = \frac{1}{2} \times v_B^2 + 10 \times 5 \Rightarrow v_B^2 = 300$$

$$E_A = E_C \Rightarrow 200 = \frac{1}{2}v_C^2 + 10 \times 2 \Rightarrow v_C^2 = 360$$

و در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{v_C}{v_B} = \sqrt{\frac{360}{300}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

چون از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است پس انرژی مکانیکی در طول مسیر پایسته است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \xrightarrow{K_2=2U_2} U_1 = U_2 + 2U_2 = 3U_2$$

$$\Rightarrow mgh_1 = 3mgh_2 \Rightarrow h_1 = 3h_2 \Rightarrow 60 = 3h_2 \Rightarrow h_2 = 20 \text{ m}$$

کار مفید انجام‌شده توسط تلمبه برقی برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم از لحظه سقوط تا لحظه برخورد به زمین است. با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_{\text{مفید}} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 4(25 - 0) = 50 \text{ J}$$

و در نهایت با استفاده از رابطه $R_a = \frac{P_{av}'}{P_{av}}$ داریم:

$$R_a = \frac{50}{100} = 0.5 \Rightarrow R_a = 50\%$$